Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 7

Tavole hash

Implementazioni Dizionario

Tempo richiesto dall'operazione più costosa:

- Liste e array O(n)
- Alberi binari di ricerca O(n)
- Alberi AVL O(log n)
- **Tavole hash** (H. P. Luhn, IBM, 1953) O(1)

…ma solo sotto certe condizioni!

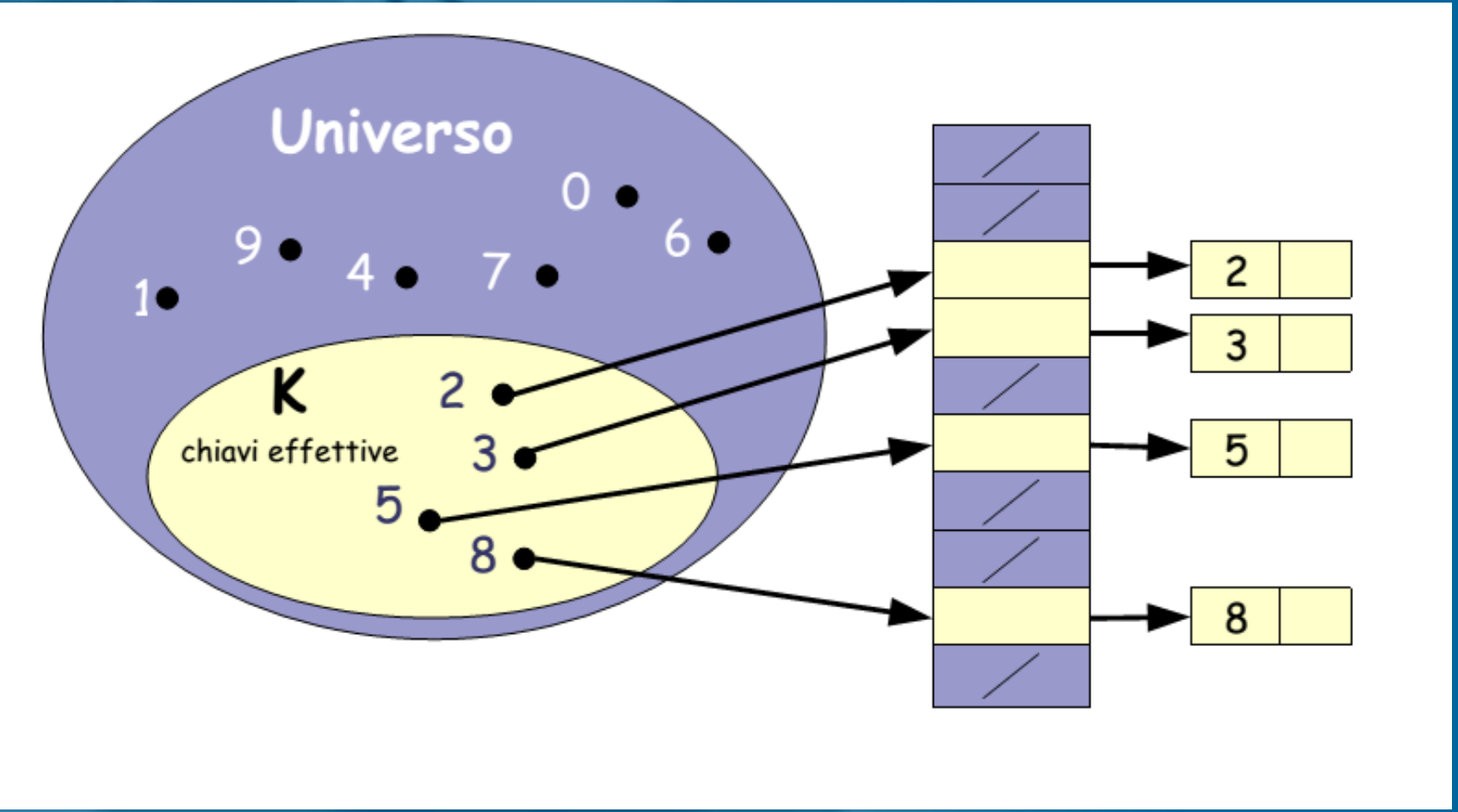
Preambolo: tavole ad accesso diretto

Sono dizionari basati sulla proprietà di accesso diretto alle celle di un array

Idea (simile all'`Integer Sort`):

- Denotiamo con n il numero corrente di elementi contenuti nel dizionario, e supponiamo che a ciascun elemento e sia associata una chiave intera k nell'intervallo [0,m-1], con $m \geq n$ (unicità della chiave)
- Il dizionario viene memorizzato in un array v di m celle
- L'elemento con chiave k è contenuto in v[k]

Esempio



Implementazione

classe `TavolaAccessoDiretto` **implementa** `Dizionario`:

dati: $S(m) = \Theta(m)$

un array v di dimensione $m \geq n$ in cui $v[k] = elem$ se c'è un elemento $elem$ con chiave k nel dizionario, e $v[k] =$ `null` altrimenti. Le chiavi k devono essere interi nell'intervallo $[0,\ m-1]$.

operazioni:

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$ $T(n) = O(1)$

$v[k] \leftarrow e$

`delete`$(chiave\ k)$ $T(n) = O(1)$

$v[k] \leftarrow$ `null`

`search`$(chiave\ k) \rightarrow elem$ $T(n) = O(1)$

return $v[k]$

Fattore di carico

- Analogamente all'`Integer Sort`, avrò che lo spazio utilizzato sarà proporzionale al valore massimo m che una chiave può assumere, e non al numero n di elementi effettivamente contenuti nel dizionario!
- Misuriamo il grado di riempimento di una tavola ad accesso diretto usando il fattore di carico

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

Esempio: tavola con i nomi di n=100 studenti indicizzati da numeri di matricola a 6 cifre:

$n=100 \qquad m=10^6 \qquad \alpha = 0{,}0001 = 0{,}01\%$

$\Rightarrow$ grande spreco di memoria!

Pregi e difetti

Pregi:

- Tutte le operazioni richiedono tempo O(1)

Difetti:

- Le chiavi devono essere necessariamente interi in [0, m-1] (non possiamo accogliere un elemento con chiave ≥ m, oppure chiavi definite su altri domini, ad esempio chiavi alfanumeriche)
- Lo spazio utilizzato è proporzionale alla chiave più grande m, e non al numero n di elementi effettivamente contenuti nel dizionario: può esserci grande spreco di memoria!

Tavole hash

Per ovviare agli inconvenienti delle tavole ad accesso diretto ne consideriamo un'estensione: le **tavole hash.** Nel seguito, denoteremo con m la dimensione della tavola hash, che verrà implementata mediante un array v di appunto m celle

Idea:

- Chiavi prese da un universo totalmente ordinato U (possono non essere numeri interi)
- Funzione *hash* (*to hash*, letteralmente, significa *tritare*): h: $U \rightarrow [0, m-1]$ (funzione che trasforma chiavi in interi, ovvero negli indici dell'array v di m celle che conterrà il dizionario)
- L'elemento con chiave $k \in U$ è contenuto in v[h(k)]

Funzioni hash perfette

Una funzione hash $h: U \rightarrow [0, m-1]$ si dice **perfetta** se è **iniettiva**, cioè per ogni $u,v \in U$:

$$u \neq v \Rightarrow h(u) \neq h(v)$$

NOTA: Ovviamente, deve essere $|U| \leq m$, altrimenti per il principio dei cassetti, ci sarà sempre una cella dell'array che dovrà accogliere almeno due elementi

Implementazione

classe `TavolaHashPerfetta` **implementa** `Dizionario`:

dati: $S(m) = \Theta(m)$

un array v di dimensione $m \geq n$ in cui $v[h(k)] = e$ se c'è un elemento e con chiave $k \in U$ nel dizionario, e $v[h(k)] =$ `null` altrimenti. La funzione $h : U \to \{0, \ldots, m-1\}$ è una funzione hash perfetta calcolabile in tempo $O(1)$.

operazioni:

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$ $T(n) = O(1)$

$v[h(k)] \leftarrow e$

`delete`$(chiave\ k)$ $T(n) = O(1)$

$v[h(k)] \leftarrow$ `null`

`search`$(chiave\ k) \to elem$ $T(n) = O(1)$

return $v[h(k)]$

Esempio

Tavola hash con i nomi di $n=100$ studenti aventi come chiavi numeri di matricola nell'insieme $U=[234717, 235717] \Rightarrow |U|=1001$

Funzione hash perfetta: $h(k) = k - 234717$, cioè $h[k] \in [0,1000] \Rightarrow$ alloco un array di $m=1001$ celle

$n=100$ $|U|=m=1001$ $\alpha = n/m=0,1 = 10\%$

…ma il vincolo $m \geq |U|$ necessario per avere una funzione hash perfetta è raramente conveniente (o possibile, spesso nella realtà $m << |U|$)

Funzioni hash non perfette

Una funzione hash si dice **non perfetta** se non è iniettiva, cioè esistono $u,v \in U$ per cui:

$$u \neq v \not\Rightarrow h(u) \neq h(v)$$

e quindi si potrebbero avere delle collisioni, ovvero esisteranno almeno due elementi diversi che vengono indirizzati sulla stessa cella

Esempio

Sia $U=\{A,B,C,\ldots,Z\}$ l'insieme delle 26 lettere dell'alfabeto inglese, e supponiamo di voler costruire una tavola hash per accogliere $m<26$ elementi aventi chiave in U

Funzione hash non perfetta:

$h(k) = ascii(k) \bmod m$ con $m<26$

Ad esempio, per $m=11$:

$h(\text{'C'}) = 67 \bmod 11=1$

$h(\text{'N'})= 78 \bmod 11=1 \Rightarrow h(\text{'C'}) = h(\text{'N'})$

$\Rightarrow$ se volessimo inserire nella tavola sia 'C' che 'N' avremmo una collisione!

Ridurre al minimo le collisioni

Per ridurre la probabilità di collisioni, che sono inevitabili quando $m < |U|$, una buona funzione hash dovrebbe essere in grado di distribuire in modo quanto più uniforme possibile le chiavi nello spazio degli indici della tavola

Idealmente, se gli elementi si distribuiscono in modo uniforme sulle celle di memoria, si dice che la funzione hash gode della proprietà di uniformità semplice

Uniformità semplice

Definizione: Sia *P*(k) la probabilità che l'elemento con chiave $k \in U$ venga inserito nella tavola, e sia

$$Q(i) = \sum_{k \in U : h(k) = i} P(k)$$

il numero atteso di elementi che verranno indirizzati dalla funzione hash nella cella i. Allora, La funzione hash h gode dell'uniformità semplice se, per ogni i,j in [0,m-1], si ha che Q(i)=Q(j).

Sfortunatamente, è assai difficile costruire funzioni hash che soddisfino la proprietà di uniformità semplice, in quanto spesso non si conosce la distribuzione *P*().

Esempio

Se U è l'insieme dei numeri reali in [0,1) e ogni chiave ha la stessa probabilità di essere scelta, allora è semplice dimostrare che la funzione hash:

$$h(k) = \lfloor km \rfloor$$

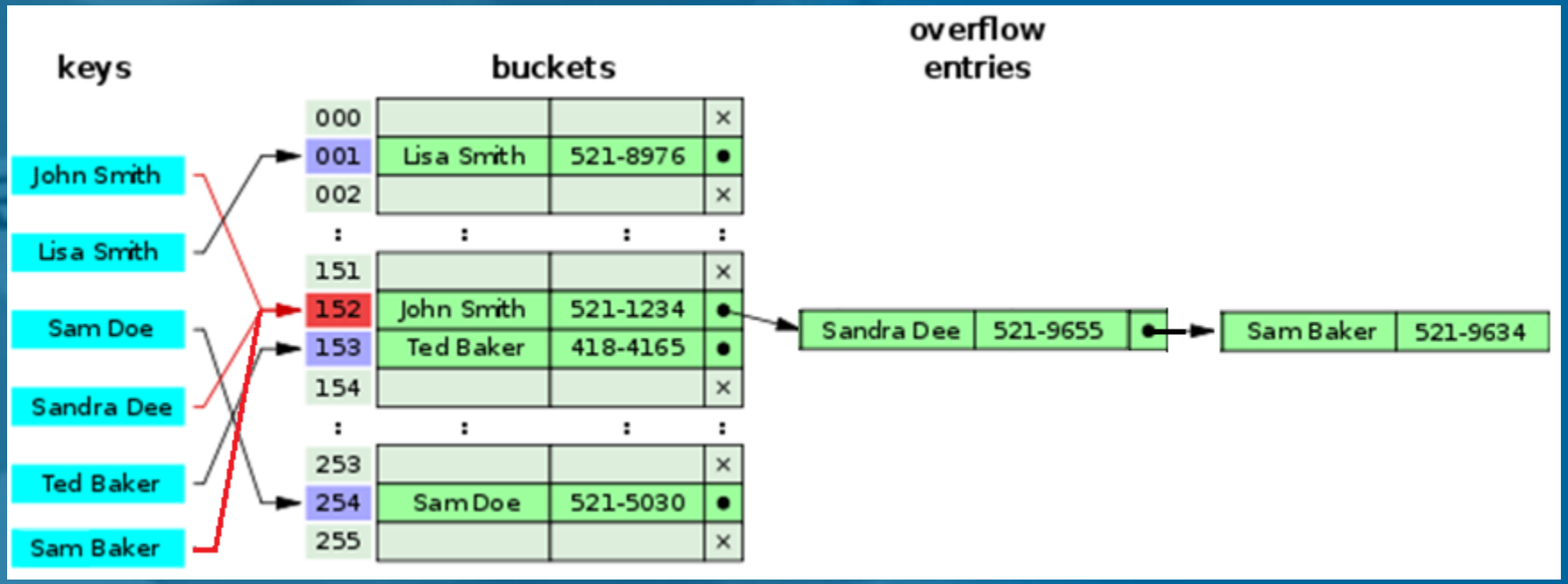
che in sostanza raggruppa le chiavi nell'intervallo [0,1) in m sottintervalli uguali di dimensione 1/m, soddisfa la proprietà di uniformità semplice. In questo caso è stato possibile definire una funzione hash che soddisfacesse la proprietà, perché la *P*() è la distribuzione uniforme. In generale, ciò non sarà vero, e questo comporterà delle agglomerazioni di elementi, con collisioni frequenti che andranno risolte

Risoluzione delle collisioni

Due metodi classici:

1. **Liste di collisione ($n \geq m$, $\alpha \geq 1$)**. Gli elementi collidenti sono contenuti in liste esterne alla tabella: v[i] contiene il primo elemento inserito in v avente chiave k tale che $h(k)=i$, e un puntatore ad una lista di elementi con chiave $k_1,k_2,...,k_p$ tali che $h(k_1)=h(k_2)=\ldots=h(k_p)=i$
2. **Indirizzamento aperto ($n \leq m$, $\alpha \leq 1$)**. Tutti gli elementi sono contenuti nella tabella: se una cella è occupata, se ne cerca un'altra libera

1. Liste di collisione



Esempio di tabella hash con liste di collisione per la gestione di una rubrica telefonica. Si noti che in questo caso U è l'insieme di tutti le possibili stringhe (cognome, nome), e quindi |U| cresce come 26^k, con k che denota la lunghezza massima di una stringa, che può ragionevolmente arrivare ad una ventina di caratteri! In tal caso ovviamente |U| >> m, ed è inevitabile generare collisioni

Analisi del costo di una ricerca

- Nel caso migliore, O(1)
- Nel caso peggiore, O(n) (devo scandire una lista di trabocco che contiene tutti gli elementi del dizionario)
- Nel caso medio, se la funzione hash gode dell'uniformità semplice, allora $T_{AVG}(n,m)=O(n/m)$, in quanto le liste di trabocco si equipartiscono gli elementi.

2. Indirizzamento aperto

- Supponiamo di voler inserire un elemento con chiave k e la sua posizione "naturale" h(k) sia già occupata
- L'indirizzamento aperto consiste nell'occupare un'altra cella, anche se potrebbe spettare di diritto a un'altra chiave
- Cerchiamo la prima cella vuota disponibile scandendo le celle secondo una sequenza di indici:

$$c(k,0)=h(k),\ c(k,1),\ c(k,2),\ldots c(k,m-1)$$

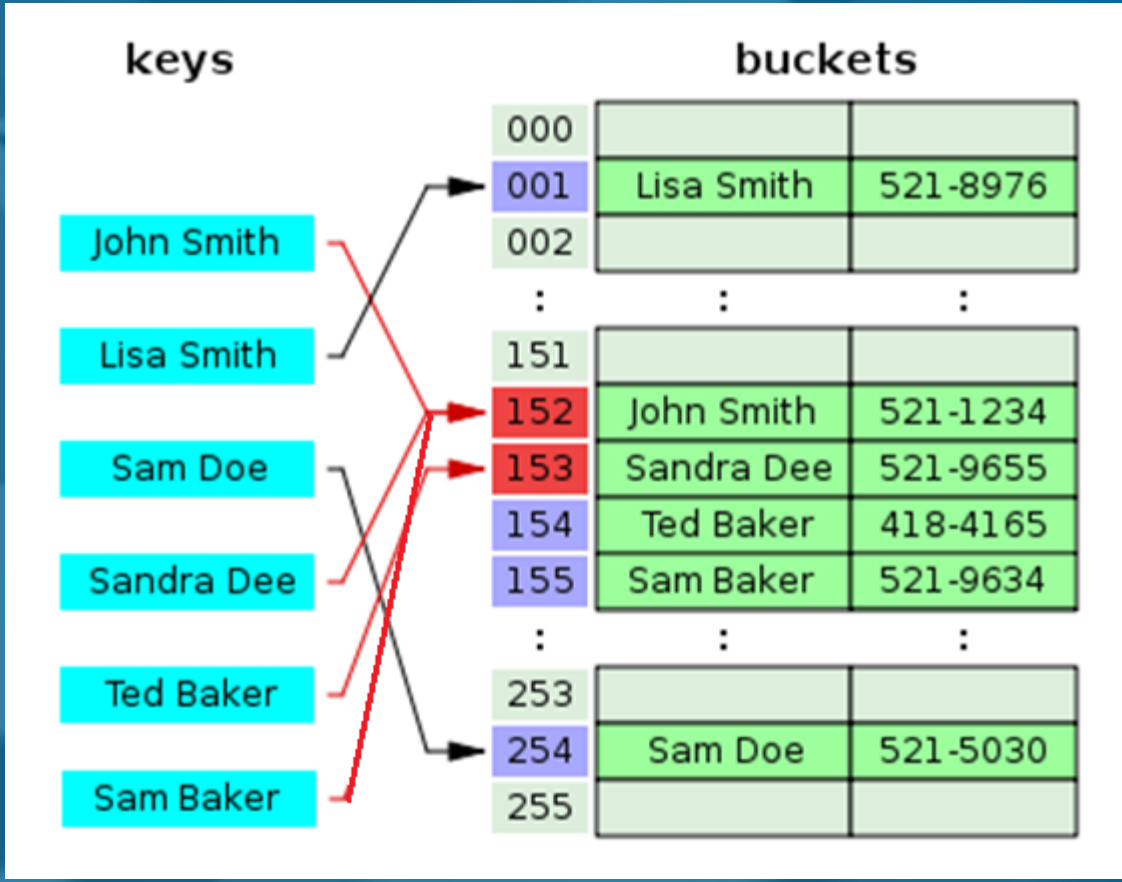
Metodi di scansione: scansione lineare

Scansione lineare: gli elementi che confliggono vengono messi l'uno dopo l'altro nella tabella (vengono cioè scandite celle contigue), utilizzando la funzione modulo per rendere la tabella "circolare"

$$c(k,i) = (h(k) + i) \bmod m$$

per $0 \leq i < m$

Esempio



Esempio di tabella hash con indirizzamento aperto a scansione lineare per la gestione di una rubrica telefonica: si noti la collisione "indiretta" tra Ted Baker e Sandra Dee, che in realtà avrebbero un'allocazione diversa secondo la funzione hash. Si noti anche come Sam Baker debba essere appeso in coda a Ted Baker, nonostante la sua collisione sia con John Smith (fenomeno dell'agglomerazione primaria)

Il problema dell'agglomerazione primaria

- La scansione lineare provoca effetti di agglomerazione primaria, cioè lunghi gruppi di celle consecutive occupate che rallentano la scansione: infatti, più cresce la dimensione di un gruppo di celle contigue occupate, e più tale insieme di celle tenderà a crescere (perché sempre più elementi collideranno e si accoderanno al gruppo)!

Metodi di scansione: scansione quadratica

Scansione quadratica: risolve il problema dell'agglomerazione primaria, scandendo celle non contigue.

$$c(k,i) = (h(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \bmod m$$

per $0 \leq i < m$

Si può dimostrare che per $c_1=c_2=0.5$ e m potenza di 2 viene scandita tutta la tavola

Metodi di scansione: hashing doppio

- La scansione quadratica risolve il problema dell'agglomerazione primaria, ma provoca invece agglomerazione secondaria: coppie di chiavi collidenti generano la stessa sequenza di scansione: $h(k_1)=h(k_2) \Rightarrow c(k_1,i)=c(k_2,i)$

L'hashing doppio risolve il problema:

$$c(k,i) = \lfloor h_1(k) + i \cdot h_2(k) \rfloor \bmod m$$

per $0 \leq i < m$, h_1 e h_2 funzioni hash, m e $h_2(k)$ primi tra loro (così da scandire tutta la tabella: infatti se $MCD(h_2(k), m) = d>1$ per qualche k, allora la ricerca di una posizione per tale chiave andrebbe ad esaminare solo una porzione di dimensione $1/d$ della tabella)

Analisi del costo di una ricerca

- Nel caso migliore O(1), in quello peggiore O(m)
- Nel caso medio, un'operazione di ricerca di una chiave, assumendo che le chiavi siano prese con probabilità uniforme da U, costa:

esito ricerca	*sc. lineare*	*hashing doppio*
chiave trovata	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-\alpha)}$	$-\frac{1}{\alpha}\log_e(1-\alpha)$
chiave non trovata	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-\alpha)^2}$	$\frac{1}{1-\alpha}$

dove $\alpha = n/m \leq 1$ è il fattore di carico. Ad esempio,

per $\alpha = 1/2$

1,5	1,38
2,5	2

mentre per $\alpha = 0{,}1$

1,05	1,05
1,11	1,11

Esercizio di approfondimento

Si supponga di inserire le chiavi 10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59 (in quest'ordine) in una tavola hash di lunghezza m=11 (con indici in [0,10]) utilizzando l'indirizzamento aperto con la funzione hash h(k)=k mod m. Illustrare il risultato dell'inserimento di queste chiavi utilizzando la scansione lineare, la scansione quadratica con $c_1=1$ e $c_2=3$, e l'hashing doppio con

$$h_2(k)=1+(k \bmod (m-1)).$$

Soluzione (scansione lineare)

- Scansione lineare

$h(10) \rightarrow [10]$
$h(22) \rightarrow [0]$
$h(31) \rightarrow [9]$
$h(4) \rightarrow [4]$
$h(15) \rightarrow [4] \rightarrow [5]$
$h(28) \rightarrow [6]$
$h(17) \rightarrow [6] \rightarrow [7]$
$h(88) \rightarrow [0] \rightarrow [1]$
$h(59) \rightarrow [4] \rightarrow [5] \rightarrow [6] \rightarrow [7] \rightarrow [8]$

22	**88**			**4**	**15**	**28**	**17**	**59**	**31**	**10**

Soluzione (scansione quadratica)

- Scansione quadratica

$h(10) \rightarrow [10]$
$h(22) \rightarrow [0]$
$h(31) \rightarrow [9]$
$h(4) \rightarrow [4]$
$h(15) \rightarrow [4] \rightarrow [8]$
$h(28) \rightarrow [6]$
$h(17) \rightarrow [6] \rightarrow [10] \rightarrow [9] \rightarrow [3]$
$h(88) \rightarrow [0] \rightarrow [4] \rightarrow [3] \rightarrow [8] \rightarrow [8] \rightarrow [3] \rightarrow [4] \rightarrow [0] \rightarrow [2]$
$h(59) \rightarrow [4] \rightarrow [8] \rightarrow [7]$

22		**88**	**17**	**4**		**28**	**59**	**15**	**31**	**10**

Soluzione (hashing doppio)

- Hashing doppio

$h(10) \rightarrow [10]$
$h(22) \rightarrow [0]$
$h(31) \rightarrow [9]$
$h(4) \rightarrow [4]$
$h(15) \rightarrow [4] \rightarrow [10] \rightarrow [5]$
$h(28) \rightarrow [6]$
$h(17) \rightarrow [6] \rightarrow [3]$
$h(88) \rightarrow [0] \rightarrow [9] \rightarrow [7]$
$h(59) \rightarrow [4] \rightarrow [3] \rightarrow [2]$

22		**59**	**17**	**4**	**15**	**28**	**88**		**31**	**10**